ВѢСТНИКЪ

МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 14 и 15.

I.

Darstellung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung mit Hülfe einer Determinante.

Das Problem, die Bewegung eines Systems materieller Puncte zu ermitteln, mögen dieselben nun frei beweglich sein, oder mag ihre Beweglichkeit gegebenen Beschränkungen unterliegen, lässt sich bekanntlich immer, falls nur die einwirkenden Kräfte ein Potential besitzen, auf eine Aufgabe der Variationsrechnung zurückführen. Bedeuten nämlich $q_1\ q_2\ \ldots\ q_\alpha$ die *independenten* Variablen, welche an Stelle der, im Allgemeinen durch gegebene Bedingungen mit einander verbundenen, rechtwinkligen Coordinaten des Punctsystemes eingeführt sind; so ist das mechanische Problem gelöst, so bald man diese q_i als Functionen der Zeit t der Art bestimmt hat, dass das Integral

$$\int (T-V)\,dt$$

ein Maximum oder Minimum wird. Es bedeutet hier T die halbe lebendige Kraft des Systems und V das Potential (*) der einwirkenden Kräfte.

Ich werde nun im vorliegenden Aufsatze die *partielle Differential-Gleichung*, auf deren Lösung die Ermittelung der q_i recurrirt, vollständig aufstellen, und zwar

in § 2. für den Fall, dass die Beschränkungen, denen die Beweglichkeit des Punctsystemes unterworfen ist, unabhängig von der Zeit sind;

in § 3. für den Fall, dass die eben genannten Beschränkungen gegebene Functionen der Zeit sind;

ferner in § 4. für den Fall, dass die relative Bewegung eines einzelnen frei beweglichen Punctes in Bezug auf ein, selber in vorgeschriebener Bewegung begriffenes, Axensystem ermittelt werden soll;

und endlich in § 5. auch dann, wenn es sich nicht, wie im vorhergehenden Falle, um die relative Bewegung eines einzelnen, frei beweglichen Punctes, sondern um die relative Bewegung eines Punctsystemes handelt, mag nun die Beweglichkeit desselben frei, oder mag sie gegebenen Beschränkungen unterworfen sein.

Als Fundament meiner Untersuchung dient das in § 1. mitgetheilte, durch die Vorlesungen von Richelot mir bekannt gewordene, Theorem I, so wie das allgemein bekannte, in demselben § angegebene, Theorem II.

§ 1.

I *Theorem.* »Versteht man unter $q_1, q_2, \ldots q_\alpha$ »unbekannte Functionen von t, und unter L irgend wel»chen *gegebenen*, aus t, aus den q_k und den $\frac{dq_k}{dt}$ zusam»mengesetzten Ausdruck, so sind die aus der Bedingung

$$(1.)\qquad \delta.\int L dt = 0$$

»fliessenden Differentialgleichungen:

$$(2.)\qquad \frac{dq_k}{dt} = q'_k\ ,\qquad \frac{d.}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

»immer der Reduction auf die Hamilton-Jacobische Form »fähig.«

»Setzt man nämlich:

$$(2a.)\qquad \left(\frac{\partial L}{\partial q'_1}q'_1 + \frac{\partial L}{\partial q'_2}q'_2 + \cdot\ \cdot + \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha}q'_\alpha\right) - L = H$$

»und bezeichnet man mit

(*) Da das Wort „Potential" nicht immer in ganz gleichem Sinne gebraucht wird, so sei bemerkt, dass ich, wenn m die Masse eines Punctes (x, y, z) vorstellt, unter dem Potential der auf diesen Punct einwirkenden Kraft, diejenige Function V verstehe, vermittelst deren sich die Differentialgleichungen des Punctes in folgender Weise darstellen lassen: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}$, etc.

»$H(t, q_1, q_2 \dots q_\alpha, p_1, p_2, \dots p_\alpha)$ denjenigen Ausdruck, in welchen sich H verwandelt, so bald man darin »an Stelle der q'_k die, mit diesen durch die Relationen

$$\frac{\partial L}{\partial q'_1} = p_1 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial q'_2} = p_2 \dots \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} = p_\alpha$$

»verbundenen, neuen Variablen p_k einführt; ferner mit »$\frac{DH}{Dq_k}$, $\frac{DH}{Dp_k}$ die diesem Ausdruck $H(t, q_1, \dots p_1, \dots)$ »zugehörigen partiellen Differential-Coefficienten: so »nehmen die Differential-Gleichungen (2.) durch Einführung »der p_k an Stelle der q'_k folgende Form an:

$$(3.) \qquad \frac{dq_k}{dt} = \frac{DH}{Dp_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{DH}{Dq_k}. \text{«}$$

II. *Theorem.* »Die Integration der Gleichungen (3.) »lässt sich reduciren auf die vollständige Auflösung einer gewissen partiellen Differential-Gleichung. Bezeichnet »man mit φ eine unbekannte von $t, q_1, q_2, \dots q_\alpha$ abhängende, Function, ferner mit

»$H\left(t, q_1, q_2, \dots q_\alpha, \dots \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\right)$ oder kürzer mit $\overline{H}$ denjenigen Ausdruck, in welchen sich das in »(3) enthaltene $H = H(t, q_1, \dots p_1, \dots)$ verwandelt, sobald man darin an Stelle der Argumente $p_1, p_2, \dots p_\alpha$ »die Ableitungen $\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} \dots \frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}$ substituirt; so ist »die in Rede stehende partielle Differential-Gleichung »folgende:

$$(4.) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \overline{H} = 0 .$$

»Gelingt es nämlich die vollständige Lösung φ dieser partiellen Differential-Gleichung zu finden; und bezeichnet »man die, in derselben enthaltenen, willkührlichen Constanten mit $A_1, A_2, \dots A_\alpha$; ferner mit $B_1, B_2, \dots B_\alpha$ »ebenfalls willkührlich gewälte Constanten: so sind

$$(5.) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial A_k} = B_k \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial q_k} = p_k$$

»die vollständigen, endlichen Integrale der Gleichungen (3).«

»Da ferner φ nur die Variablen $t, q_1, q_2, \dots q_\alpha$ »enthält, so sind zugleich

$$(6.) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial A_k} = B_k$$

»diejenigen endlichen Gleichungen, durch welche $q_1, q_2, \dots q_\alpha$ »als Funstionen von t der Art bestimmt werden, wie es »die in (1) gestellte Bedingung $\delta . \int L dt = 0$ verlangt.«

Das Theorem (II) zu beweisen, würde überflüssig sein. Degegen scheint es wohl erforderlich, die in Theorem (I) ihrem Resultat nach angegebene Transformation ausführlich darzustellen.

Es handelt sich darum in den aus (1) unmittelbar fliessenden Differential-Gleichungen (2):

$$(7.) \qquad \frac{dq_k}{dt} = q'_k \,, \quad \frac{d.}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

an Stelle der q'_k *neue* Variable einzuführen, nämlich die Variablen p_k, welche mit jenen durch die α Relationen

$$(8.) \qquad \frac{\partial L}{\partial q'_k} = p_k$$

zusammenhängen. Zu diesem Zweck leiten wir zunächst aus dem gegebenen Ausdruck L einen andern ab, welcher mit H bezeichnet werden mag, und folgende Form besitzen soll:

$$H = \sum_{k=1}^{k=\alpha} \left(q'_k \frac{\partial L}{\partial q'_k} \right) - L .$$

Denken wir uns nun in diesem Ausdruck die darin enthaltenen Variablen q_k, q'_k um beliebige kleine Incremente Δq_k, $\Delta q'_k$ vermehrt, und bezeichnen wir den daraus für H selber entstehenden Zuwachs mit ΔH, so ist:

$$\Delta H = \sum_{k=1}^{k=\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial q'_k} . \Delta q'_k + q'_k . \Delta \frac{\partial L}{\partial q'_k} \right) - \sum_{k=1}^{k=\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} . \Delta q_k + \frac{\partial L}{\partial q'_k} . \Delta q'_k \right)$$

d. i.

$$\Delta H = \sum_{k=1}^{k=\alpha} \left(q'_k . \Delta \frac{\partial L}{\partial q'_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} . \Delta q_k \right),$$

also mit Benutzung von (8.):

$$\Delta H = \sum_{k=1}^{k=\alpha} \left(q'_k . \Delta p_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} . \Delta q_k \right).$$

Diese Formel macht ΔH abhängig von den Δq_k und den Δp_k, giebt also den Zuwachs, welchen der Ausdruck H empfängt, der Art an, als wäre derselbe nicht aus den q_k und q'_k sondern aus den q_k und p_k zusammengesetzt. Wir können demnach aus dieser Formel unmittelbar auf die Werthe derjenigen partiellen Ableitungen $\frac{DH}{Dq_k}$, $\frac{DH}{Dp_k}$ schliessen, welche dem Ausdruck H zukommen, sobald man denselben als Function der q_k und p_k ansieht. Für die genannten Ableitungen ergeben sich nämlich sofort folgende Formeln:

$$(9.) \qquad \frac{DH}{Dq_k} = -\frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad \frac{DH}{Dp_k} = q'_k .$$

Vermittelst dieser Gleichungen (9) und der Gleichungen (8) verwandeln sich aber unsere Differential-Gleichungen (7) augenblicklich in:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{DH}{Dp_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{DH}{Dq_k}. \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 2.

Wenden wir uns zunächst zur Behandlung eines Punctsystemes, dessen Beweglichkeit durch gegebene, und zwar von der Zeit unabhängige, Bedingungen beschränkt ist. Bezeichnet man die Anzahl der Puncte des Systemes mit n und die Anzahl der gegebenen Bedinguns-Gleichungen mit β, so wird man die $3n$ Coordinaten sämmtlicher Puncte des Systemes abhängig machen können von $3n-\beta=\alpha$ *independenten* Variablen $q_1, q_2, \ldots q_\alpha$. Da die gegebenen Bedingungen von der Zeit t unabhängig sind, so werden die Relationen, durch welche die Coordinaten x, y, z irgend eines Punctes m des Systemes mit den independenten Variablen zusammenhängen:

$$(9a.)\quad \begin{cases} x=\varphi(q_1, q_2, \ldots q_\alpha) \\ y=\psi(q_1, q_2, \ldots q_\alpha) \\ z=\chi(q_1, q_2, \ldots q_\alpha) \end{cases}$$

ebenfalls *frei* von t sein. Demnach ergiebt sich für die halbe lebendige Kraft T des Systemes folgender Werth:

$$T=\tfrac{1}{2}\,S\,m.\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}q'_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}q'_2+\ldots\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}q'_\alpha\right)^2 \\ +&\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}q'_1+\frac{\partial y}{\partial q_2}q'_2+\ldots\frac{\partial y}{\partial q_\alpha}q'_\alpha\right)^2 \\ +&\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}q'_1+\frac{\partial z}{\partial q_2}q'_2+\ldots\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}q'_\alpha\right)^2 \end{aligned}\right\},$$

wo q'_k für $\frac{dq_k}{dt}$ steht, und die Summation S über alle Puncte $m\ (x, y, z)$ des Systemes auszudehnen ist. Dieser Ausdruck für T verwandelt sich, wenn man ihn nach Potenzen und Producten der q'_k ordnet in:

$$(10.)\qquad T=\tfrac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{k=\alpha}\sum_{i=1}^{i=\alpha}u_{ki}\cdot q'_k\,q'_i$$

wo

$$(11.)\qquad u_{ki}=S\,m\left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\partial x}{\partial q_i}+\frac{\partial y}{\partial q_k}\frac{\partial y}{\partial q_i}+\frac{\partial z}{\partial q_k}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)$$

ist. Es ist also T hinsichtlich der q'_k ein *homogenes* Polynom 2-ten Grades.

Das Potential V der auf das Punctsystem einwirkenden Kräfte wird zunächst als eine Function gegeben sein, welche von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z und möglicher Weise auch noch von der Zeit t abhängt. Diese Function kann aber mit Hülfe der Relationen (9a.) sofort in einen, von den q_k und t abhängenden Ausdruck umgewandelt werden, so dass also

$$V=F(t, q_1, q_2 \ldots q_\alpha)$$

wird.

Um die Bewegung des Punctsystemes zu ermitteln, hat man bekanntlich $q_1, q_2 \ldots q_\alpha$ der Art als Functionen der Zeit zu bestimmen, dass das Integral

$$\int (T-V)\,dt$$

ein Maxim oder Minim. wird. Um nun diese Bestimmung der q_k nach den Vorschriften des § 1 auf die Lösung einer partiellen Differential-Gleichung zu reduciren, müssen der Reihe nach die dort angegebenen Ausdrücke L, H, $\overline{H}$ gebildet werden. Zunächst ist hier:

$$L=T-V.$$

Sodann ergiebt sich aus (2a), mit Rücksicht darauf, dass V von den q'_k unabhängig ist:

$$H=\sum_{k=1}^{k=\alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_k}q'_k\right)-(T-V),$$

oder, weil T ein homogenes Polynom in Bezug auf die q'_k ist, und demzufolge die identische Gleichung

$$(12.)\qquad T=\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\alpha}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_k}q'_k\right)$$

stattfindet:

$$(13.)\qquad H=2T-(T-V)=T+V.$$

Aus diesem H muss nun der in § 1 angegebene Ausdruck $H(t, q_1, q_2 \ldots q_\alpha, p_1, p_2 \ldots p_\alpha)$ abgeleitet werden; d. h. es müssen in H an Stelle der q'_k die mit diesen durch die Relationen

$$(14.)\qquad \frac{\partial L}{\partial q'_k}=p_k,\quad\text{oder}\quad \frac{\partial T}{\partial q'_k}=p_k$$

verbundenen neuen Variablen p_k eingeführt werden. Zu diesem Zweck bilden wir mit Hülfe von (12.) und (13.) die Formel:

$$H-V=T=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}q'_1+\frac{\partial T}{\partial q'_2}q'_2+\ldots\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}q'_\alpha\right)$$

oder mit Rücksicht auf (14.)

$$2(H-V)=p_1 q'_1+p_2 q'_2+\ldots p_\alpha q'_\alpha$$

ferner mit Hülfe von (10) und (14) die Formeln:

$$\begin{aligned} p_1&=u_{11}\,q'_1+u_{12}\,q'_2+\ldots u_{1\alpha}\,q'_\alpha \\ p_2&=u_{21}\,q'_1+u_{22}\,q'_2+\ldots u_{2\alpha}\,q'_\alpha \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_\alpha&=u_{\alpha1}\,q'_1+u_{\alpha2}\,q'_2+\ldots u_{\alpha\alpha}\,q'_\alpha \end{aligned}$$

und erhalten sodann aus den letzten $(\alpha+1)$ Gleichungen, durch Elimination der q'_k, sofort:

$$\begin{vmatrix} 2(H-V) & p_1 & p_2 & \ldots & p_\alpha \\ p_1 & u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1\alpha} \\ p_2 & u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2\alpha} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_\alpha & u_{\alpha1} & u_{\alpha2} & \ldots & u_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}=0.$$

Da sowohl V als auch die u_{ki} unabhängig sind von den q'_k, so ist H durch diese Gleichung als Function von $t, q_1, q_2 \ldots q_\alpha, p_1, p_2 \ldots p_\alpha$ dargestellt. Um nun ferner das in § 1 angegebene $\overline{H}$ zu erhalten,

hat man nur in dem Ausdrucke $H(t, q_1, q_2 \cdots q_a, p_1, p_2 \cdots p_a)$ die Argumente $p_1, p_2 \cdots p_a$ durch die Ableitungen einer unbekannten Function, nämlich durch $\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} \cdots \frac{\partial\varphi}{\partial q_a}$ zu ersetzen. Folglich ergiebt sich für $\overline{H}$ die Gleichung:

$$(15.) \quad \begin{vmatrix} 2(\overline{H}-V) & \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial q_a} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1a} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2a} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi}{\partial q_a} & u_{a1} & u_{a2} & \cdots & u_{aa} \end{vmatrix} = 0.$$

Denkt man sich endlich $\overline{H}$ aus dieser Gleichung (15) berechnet, und den, so erhaltenen, Werth in die Formel

$$(16.) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \overline{H} = 0$$

substituirt, so stellt alsdann diese letztere die gesuchte partielle Differential-Gleichung vor. Da man nun aber offenbar zu demselben Resultate gelangt, mag man $\overline{H}$ aus (15) berechnen, und dann in (16) substituiren, oder mag man umgekehrt $\overline{H}$ aus (16) berechnen und dann in (15) einsetzen; so lässt sich die partielle Differential-Gleichung, durch Anwendung des letztern Verfahrens, augenblicklich darstellen. Man erhält dann für dieselbe diejenige Form, welche in (17) sogleich angegeben werden soll.

Das Resultat dieser Untersuchung lässt sich folgendermassen aussprechen:

»*Sind* $q_1, q_2 \cdots q_a$ *die independenten Variablen,* »*welche an Stelle der durch gegebene Bedingungen von* »*einander abhängigen Coordinaten x, y, z eingeführt sind;* »*bedeutet ferner* $V = F(t, q_1, q_2, \cdots q_a)$ *das Potential* »*der einwirkenden Kräfte; und bezeichnet man ausser-* »*dem mit* u_{ki} *folgende* a^2 *Ausdrücke:*

$$u_{ki} = S\, m \left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial y}{\partial q_k}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial q_k}\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)$$

»*so hängt die Ermittelung der Bewegung des Punctsy-* »*stemes von der Auffindung einer Function* φ *ab, wel-* »*che der partiellen Differential-Gleichung:*

$$(17.) \quad \begin{vmatrix} -2\left(V + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) & \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial q_a} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1a} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{1a} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi}{\partial q_a} & u_{a1} & u_{a2} & \cdots & u_{aa} \end{vmatrix} = 0$$

»*identisch Genüge leistet, und zugleich a willkührliche* »*Constante* $A_1, A_2 \cdots A_a$ *enthält. Ist nämlich diese* »*Function* φ *gefunden, so sind alsdann*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A_1} = B_1 \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial A_2} = B_2 \cdots \frac{\partial\varphi}{\partial A_a} = B_a$$

»*die mit 2a willkührlichen Constanten A, B versehenen,* »*endlichen Gleichungen, durch welche die Bewegung des* »*Punctsystemes dargestellt wird.*«

§ 3.

Ich gehe nun über zu der Bewegung eines Punctsystemes, dessen Beweglichkeit durch gegebene, und zwar *von der Zeit abhängende Bedingungen* beschränkt ist. Bezeichnet man mit $q_1, q_2, \cdots q_a$ die independenten Variablen, welche an Stelle der, durch die gegebenen Bedingungs-Gleichungen mit einander verbundenen, rechtwinkligen Coordinaten des Punctsystemes eingeführt sind, so werden sich die letztern nicht mehr (wie in § 2) durch die q_k allein, sondern durch diese *und durch die in den Bedingungen enthaltene Zeit t* darstellen. Man wird also für die Coordinaten x, y, z irgend eines dem Systeme angehörigen Punctes m Ausdrücke von folgender Gestalt haben:

$$(18.) \quad \begin{cases} x = \varphi\,(t, q_1, q_2 \cdots q_a) \\ y = \psi\,(t, q_1, q_2 \cdots q_a) \\ z = \chi\,(t, q_1, q_2 \cdots q_a) \end{cases}$$

In der Formel:

$$\delta. \int (T - V)\, dt = 0$$

durch welche die Unbekannten q_k wiederum ihre Bestimmung finden, ist dann im Allgemeinen das Potential V ein von den q_k und t; und andererseits die halbe lebendige Kraft T ein von den q_k und t und auch von den q'_k abhängiger Ausdruck. Der wesentliche Unterschied der vorliegenden Aufgabe von der in § 2 behandelten besteht darin, dass T nicht mehr wie dort, in Bezug auf die q'_k ein *homogenes* Polynom 2 Grades ist, sondern gegenwärtig ein Polynom darstellt, dessen Terme hinsichtlich der q'_k theils 0-ter, theils 1-ter und theils 2-ter Dimension sind.

Bei Bildung von T ist es zweckmässig, das in den Gleichungen (18) vorkommende t durch die Bezeichnung q_0 zu ersetzen, also zu schreiben:

$$\begin{cases} x = \varphi\,(q_0, q_1, q_2 \cdots q_a) \\ y = \psi\,(q_0, q_1, q_2 \cdots q_a) \\ z = \chi\,(q_0, q_1, q_2 \cdots q_a) \end{cases}$$

wo dann

$$(18a.) \quad q_0 = t \quad , \quad q'_0 = 1$$

ist. Für T ergiebt sich nunmehr folgender Werth:

$$T = \tfrac{1}{2} S\, m \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial x}{\partial q_0} q'_0 + \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \cdots \frac{\partial x}{\partial q_a} q'_a\right)^2 \\ + \left(\frac{\partial y}{\partial q_0} q'_0 + \frac{\partial y}{\partial q_1} q'_1 + \cdots \frac{\partial y}{\partial q_a} q'_a\right)^2 \\ + \left(\frac{\partial z}{\partial q_0} q_0 + \frac{\partial z}{\partial q_1} q'_1 + \cdots \frac{\partial z}{\partial q_a} q'_a\right)^2 \end{array} \right\}$$

oder:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{k=a} \, , \sum_{i=0}^{i=a} (u_{ki}\, q'_k\, q'_i)$$

wo:

$$u_{ki} = S\, m \left(\frac{\partial x}{\partial q_k} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial y}{\partial q_k} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial q_k} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)$$

ist, und wo S wieder die über alle Puncte m des Systems auszudehnende Summation andeutet.

Wenden wir nur die in § 1 aufgestellten Theoreme an, so ist für L wiederum der Ausdruck $T-V$ zu nehmen:

$$L = T - V$$

oder nach (18a.)

$$L = T - V.\, q'_0\, q'_0$$

d. i

$$(19.) \qquad L = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=a} \sum_{i=0}^{i=a} (u_{ki}\, q'_k\, q'_i) - V \cdot q'_0\, q'_0 \cdot$$

Dieser Ausdruck für L stellt in Bezug auf die $(a+1)$ Grössen $q'_0, q'_1, q'_2, \ldots q'_a$ ein *homogenes* Polynom 2 Grades dar, und genügt also folgender Gleichung:

$$(20.) \qquad 2\, L = q'_0 \frac{\partial L}{\partial q'_0} + q'_1 \frac{\partial L}{\partial q'_1} + \ldots q'_a \frac{\partial L}{\partial q'_a} \cdot$$

Demzufolge können wir dem in § 1 angegebenen Ausdruck H

$$H = q'_1 \frac{\partial L}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial L}{\partial q'_2} + \ldots q'_a \frac{\partial L}{\partial q'_a} - L$$

im vorliegenden Falle, mit Rücksicht auf (20), die Form geben:

$$(21.) \qquad H = L - q'_0 \frac{\partial L}{\partial q'_0} \cdot$$

Führen wir nun die in § 1 angegebenen neuen Variablen

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial q'_1}, \; p_2 = \frac{\partial L}{\partial q'_2}, \ldots p_a = \frac{\partial L}{\partial q'_a}$$

und daneben noch die Variable

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial q'_0},$$

so ergiebt sich aus (19), (20), (21) sofort:

$$\begin{aligned}
2L &= \qquad\qquad p_0\, q'_0 + p_1\, q'_1 + \ldots + p_a\, q'_a \\
p_0 &= (u_{00} - 2\,V)\, q'_0 + u_{01}\, q'_1 + \ldots + u_{0a}\, q'_a \\
p_1 &= \qquad (u_{10}\, q'_0 + u_{11}\, q'_1 + \ldots + u_{1a}\, q'_a \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_a &= \qquad (u_{a0}\, q'_0 + u_{a1}\, q'_1 + \ldots + u_{aa}\, q'_a \\
H &= L - p_0\, q'_0 \;.
\end{aligned}$$

Wenn man durchgängig für q'_0 seinen Werth 1 substituirt, ferner die beiden ersten Gleichungen von einander subtrahirt, und dabei für $2L-2p_0$, der letzten Gleichung gemäss, $2H$ einsetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&u_{00} + 2(H-V) + (u_{01}-p_1)q'_1 + (u_{02}-p_2)q'_2 + \ldots (u_{0a}-p_a)q'_a = 0 \\
&(u_{10}-p_1) \quad + \quad u_{11}\, q'_1 + \quad u_{12}\, q'_2 + \ldots\ldots u_{1a}\, q'_a = 0 \\
&(u_{20}-p_2) \quad + \quad u_{21}\, q'_1 + \quad u_{22}\, q'_2 + \ldots\ldots u_{2a}\, q'_a = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(u_{a0}-p_a) \quad + \quad u_{a1}\, q'_1 + \quad u_{a2}\, q'_2 + \ldots\ldots u_{aa}\, q'_a = 0
\end{aligned}$$

und daraus endlich durch Elimination von $q'_1, q'_2, \ldots q'_a$:

$$(22.) \qquad \begin{vmatrix}
u_{00} + 2(H-V) & u_{01} - p_1 & u_{02} - p_2 & \ldots & u_{0a} - p_a \\
u_{10} - p_1 & u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1a} \\
u_{20} - p_2 & u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2a} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
u_{a0} - p_a & u_{a1} & u_{a2} & \ldots & u_{aa}
\end{vmatrix} = 0$$

Durch diese Gleichung ist H als Function von $t, q_1, q_2, \ldots q_a, p_1, p_2 \ldots p_a$ dargestellt. Die partielle Differential-Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H = 0$$

auf welche das vorliegende Problem führt, wird daher, wie man leicht übersieht, aus der Formel (22) sofort erhalten, wenn man darin an Stelle von $H, p_1, p_2 \ldots p_a$ respective $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial q_a}$ substituirt. Demnach ergiebt sich folgender Satz:

»*Handelt es sich um die Bewegung eines dem Potential V unterworfenen Punctsystemes, welches in seiner Beweglichkeit durch irgend welche, mit der Zeit sich ändernde, Bedingungen beschränkt ist; sind demnach die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, irgend eines Punctes m mit den independenten Variablen $q_1, q_2, \ldots q_a$ durch Relationen verbunden, in welchen ausser den genannten Grössen auch noch die Zeit vorkommt; so hängt die Ermittelung der in Frage stehenden Bewegung von der vollständigen Lösung φ folgender partiellen Differential-Gleichung ab:*

$$(23.) \qquad \begin{vmatrix}
u_{00} - 2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V\right) & u_{01} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} & u_{02} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} & \ldots & u_{0a} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_a} \\
u_{10} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} & u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1a} \\
u_{20} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} & u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2a} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
u_{a0} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_a} & u_{a1} & u_{a2} & \ldots & u_{aa}
\end{vmatrix} = 0.$$

»*wo unter den* u_{ki} *die Ausdrücke*

$$u_{ki} = S\, m \left(\frac{\partial x}{\partial q_k}\,\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial y}{\partial q_k}\,\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial z}{\partial q_k}\,\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)$$

»*und in diesen unter* $q_1, q_2 \ldots q_\alpha$ *die independenten* »*Variablen, unter* q_0 *dagegen die Zeit* t *zu verstehen ist.*«

Man übersieht leicht, dass die im vorhergehenden § gefundene partielle Differential-Gleichung (17) einen speciellen Fall der gegenwärtig gefundenen (23) bildet. Wendet man nämlich (23) auf ein mechanisches Problem an, bei welchem die Bedingungs-Gleichungen von der Zeit t unabhängig sind, so verschwinden die mit dem Index (o) behafteten u. Fallen diese aber fort, so wird (23) identisch mit (17); wie man sofort erkennt, sobald man beachtet, dass der Wert einer Determinante ungeändert bleibt, wenn gleichzeitig die Glieder der ersten Horizontal- und die der ersten Verticalreihe mit —1 multiplicirt werden.

§ 4.

Wir wollen nun zu den Problemen der *relativen* Bewegung übergehen, und hierbei beginnen mit dem Fall eines *einzelnen* und *frei* beweglichen Punctes m. Sind x, y, z, die, nach drei unbeweglichen und aufeinander senkrechten Axen gemessenen, Coordinaten dieses Punctes, und andererseits ξ, η, ζ die Coordinaten desselben in Bezug auf ein in vorgeschriebener Bewegung begriffenes, ebenfalls rechtwinkliges Coordinatensystem, so finden zwischen diesen x, y, z und ξ, η, ζ Relationen von folgender Form statt:

$$(23a.)\quad \begin{cases} x = \sigma_1 + \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta \\ y = \sigma_2 + \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta \\ z = \sigma_3 + \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta \end{cases}$$

wo die $\sigma_k, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, *gegebene* Functionen der Zeit sind, welche den bekannten 6 Gleichungen:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \quad , \quad \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0\ ,$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Genüge leisten. Um die halbe lebendige Kraft:

$$T = \frac{m}{2}(x'x' + y'y' + z'z')$$

durch die relativen Coordinaten ξ, η, ζ darstellen zu können, wird es zweckmässig sein, folgende Bezeichnungen einzuführen:

$$(24.)\quad \begin{cases} \gamma_1\beta'_1 + \gamma_2\beta'_2 + \gamma_3\beta'_3 = -(\beta_1\gamma'_1 + \beta_2\gamma'_2 + \beta_3\gamma'_3) = a \\ \alpha_1\gamma'_1 + \alpha_2\gamma'_2 + \alpha_3\gamma'_3 = -(\gamma_1\alpha'_1 + \gamma_2\alpha'_2 + \gamma_3\alpha'_3) = b \\ \beta_1\alpha'_1 + \beta_2\alpha'_2 + \beta_3\alpha'_3 = -(\alpha_1\beta'_1 + \alpha_2\beta'_2 + \alpha_3\beta'_3) = c \end{cases}$$

$$(25.)\quad \begin{cases} \alpha_1\sigma''_1 + \alpha_2\sigma''_2 + \alpha_3\sigma''_3 = A \\ \beta_1\sigma''_1 + \beta_2\sigma''_2 + \beta_3\sigma''_3 = B \\ \gamma_1\sigma''_1 + \gamma_2\sigma''_2 + \gamma_3\sigma''_3 = C \end{cases}$$

wo die Accente ('), (") durchgängig Differential-Quotienten nach der Zeit vorstellen sollen. Auch wird es gut sein, sogleich zu bemerken, dass für die Functionen a, b, c folgende Gleichungen gelten:

$$(26)\quad \begin{cases} \alpha'_1 = c\beta_1 - b\gamma_1 \\ \beta'_1 = a\gamma_1 - c\alpha_1 \\ \gamma'_1 = b\alpha_1 - a\beta_1 \end{cases}$$

Was die Ableitung dieser Gleichungen anbelangt, so ergiebt sich z. B. die erste derselben sofort, wenn man die Formeln:

$$\alpha_1\alpha'_1 + \alpha_2\alpha'_2 + \alpha_3\alpha'_3 = o$$
$$\beta_1\alpha'_1 + \beta_2\alpha'_2 + \beta_3\alpha'_3 = c$$
$$\gamma_1\alpha'_1 + \gamma_2\alpha'_2 + \gamma_3\alpha'_3 = -b$$

der Reihe nach mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ multiplicirt, und sodann alle drei addirt; in analoger Weise die beiden übrigen.

Nunmehr können wir zur Bildung des Ausdruckes T übergehen, und erhalten zunächst aus (23.a):

$$(27.)\quad x' = \sigma'_1 + (\alpha_1\xi'_1 + \beta_1\eta'_1 + \gamma_1\zeta'_1) + (\alpha'_1\xi_1 + \beta'_1\eta_1 + \gamma'_1\zeta_1)$$

sodann mit Berücksichtigung der Gleichungen (26):

$$(28.)\quad x' = \sigma'_1 + \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w\ ,$$

wo für den Augenblick u, v, w zur Bezeichnung folgender Ausdrücke gebraucht sind:

$$u = \xi' + b\zeta - c\eta$$
$$v = \eta' + c\xi - a\zeta$$
$$w = \zeta' + a\eta - b\xi$$

Durch gleichzeitige Benutzung von (27) und (28) ergiebt sich nun

$$x'x' = \sigma'_1\sigma'_1 + 2\,\sigma'_1\,\frac{d.(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta)}{dt} + (\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w)^2$$

oder

$$x'x' = \frac{d.\,(2\,\sigma'_1(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta) + \int\sigma'_1\sigma'_1\,dt)}{dt}$$

$$-\,2\,\sigma''_1(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta) + (\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w)^2$$

folglich mit Rücksicht auf (24):

$$(29.)\quad T = \frac{m}{2}\left(\frac{dF}{dt} - 2(A\xi + B\eta + C\zeta) + (u^2 + v^2 + w^2)\right),$$

wo F eine Function ist, deren Bedeutung nicht weiter von Gewicht sein wird.

Soll nun die Bewegung des Punctes m in Bezug auf das selber in Bewegung begriffene Axensystem (ξ, η, ζ) ermittelt werden, so hat man die Coordinaten ξ, η, ζ als Functionen der Zeit so zu bestimmen, dass

$$(30.)\quad \delta.\int(T - V)\,dt = 0$$

wird, wo V das gegebene, von ξ, η, ζ und möglicher Weise auch noch von t abhängige, Potential der auf den Punct einwirkenden Kraft vorstellt. Da übrigens der unter dem Integral-Zeichen stehende Ausdruck $T-V$ zufolge (29) den Term $\frac{m}{2}\,\frac{dF}{dt}$ enthält, dieser Term aber in der Formel (30) vollständig überflüssig ist, so kann man die zur Bestimmung von ξ, η, ζ dienende Bedingung folgendermas-

sen hinstellen:

$$(31.)\qquad \delta . \int L dt = 0$$

wo L folgenden Ausdruck vorstellen soll:

$$L = \frac{m}{2}\Big(-2\,(A\xi + B\eta + C\zeta) + (u^2 + v^2 + w^2)\Big) - V$$

d. i.

$$L = \frac{m}{2}\left\{\begin{array}{c}(\xi' + b\zeta - c\eta)^2 \\ +(\eta' + c\xi - a\zeta)^2 \\ +(\zeta' + a\eta - b\xi)^2\end{array}\right\} - m\,(A\xi + B\eta + C\zeta) - V.$$

Bezeichnet man diesen Ausdruck durch:

$$L = \tfrac{1}{2}\left(u_{11}\,\xi'^2 + u_{22}\,\eta'^2 + u_{33}\,\zeta'^2 + 2u_{23}\,\eta'\,\zeta' + 2u_{31}\,\zeta'\,\xi' + 2u_{12}\,\xi'\,\eta' + 2u_{01}\,\xi' + 2u_{02}\,\eta' + 2u_{03}\,\zeta' + u_{00}\right) - V$$

wo also:

$$(32.)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_{11} = u_{22} = u_{33} = m \quad , \quad u_{23} = u_{31} = u_{12} = 0 \\ u_{01} = m\,(b\zeta - c\eta)\ ,\ u_{02} = m\,(c\xi - a\zeta)\ ,\ u_{03} = m\,(a\eta - b\xi) \\ u_{00} = m\big((b\zeta - c\eta)^2 + (c\xi - a\zeta)^2 + (a\eta - b\xi)^2\big) - 2m\,(A\xi + B\eta + C\zeta) \end{array}\right.$$

ist, so hat derselbe in Bezug auf ξ', η', ζ' dieselbe Form, wie der in § 3 (19) angegebene Ausdruck in Bezug auf $q'_1, q'_2, \ldots q'_\mu$. *Nach* § 3, (23) *ist demnach die partielle Differential-Gleichung, auf deren Lösung das vorliegende Problem zurückkommt, folgende:*

$$\left|\begin{array}{cccc} u_{00} - 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + V\right) & u_{01} - \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} & u_{02} - \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} & u_{03} - \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} \\ u_{10} - \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} & m & 0 & 0 \\ u_{20} - \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} & 0 & m & 0 \\ u_{30} - \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} & 0 & 0 & m \end{array}\right| = 0,$$

welche schliesslich durch Einsetzung der in (32) *für die u angegebenen Werthe übergeht in:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2\right\} + \left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} & \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} \\ \xi & \eta & \zeta \\ a & b & c \end{array}\right| + (A\xi + B\eta + C\zeta) + V = 0.$$

Hier sind a, b, c, A, B, C, bekannte Functionen von t, welche mit den ursprünglich gegebenen $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \sigma_k$ durch die Gleichungen (24) (25) zusammenhängen. Ferner ist V ebenfalls eine gegebene, von ξ, η, ζ und möglicherweise auch noch von t abhängende, Function.

§ 5.

Schliesslich mag noch der Fall eines Punctsystemes behandelt werden, dessen Bewegung in Bezug auf ein, in vorgeschriebener Bewegung begriffenes, Axensystem (ξ, η, ζ) bestimmt werden soll; mag nun das Potential der einwirkenden Kräfte allein von der Lage des Punctsystemes zu den Axen (ξ, η, ζ), oder mag dasselbe ausserdem auch noch abhängig sein von seiner Lage zu den festen Axen (x, y, z); mag ferner die Beweglichkeit des Systemes frei oder in gegebener Weise beschränkt sein. Falls jedoch derartige Beschränkungen d. i. gegebene Bedingungs-Gleichungen zwischen den Coordinaten ξ, η, ζ existiren, so soll (allerdings nur der Einfachheit willen) angenommen werden, dass diese Bedingungs-Gleichungen unabhängig von t sind.

Bezeichnet man die Masse irgend eines der Puncte des Systemes mit m, und die Coordinaten desselben in den beiden Axensystemen mit x, y, z und ξ, η, ζ, so ergiebt sich aus (29) für die halbe lebendige Kraft T des Punctsystemes folgender Ausdruck:

$$T = \frac{d.\,\mathsf{S}\frac{m}{2}F}{dt} - \mathsf{S}\,m\,(A\xi + B\eta + C\zeta) + \mathsf{S}\frac{m}{2}\,(u^2 + v^2 + w^2).$$

Die zur Bestimmung der Bewegung des Systems dienende Formel ist demnach:

$$(33.)\qquad \delta . \int L dt = 0$$

wo L folgenden Werth hat:

$$(34.)\qquad L = \mathsf{S}\frac{m}{2}\left\{\begin{array}{c}(\xi' + b\zeta - c\eta)^2 \\ +(\eta' + c\xi - a\zeta)^2 \\ +(\zeta' + a\eta - b\xi)^2\end{array}\right\} - \mathsf{S}\,m\,(A\xi + B\eta + C\zeta) - V,$$

wenn nämlich V das gegebene Potential vorstellt, und die Summation S über alle Puncte m des Systemes ausgedehnt gedacht wird. Bezeichnet α die Anzahl von Gleichungen, welche zu den gegebenen zwischen ξ, η, ζ stattfindenden Bedingungs-Gleichungen noch hinzugefügt werden müsste, um die relative Lage des Punctsystemes in

Bezug auf die Axen (ξ, η, ζ) vollständig festzustellen, kann man demnach die rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ auf α independente Variable $q_1, q_2, .. q_\alpha$, reduciren; so sind nun diese q_k der Art zu bestimmen, dass sie der Formel (33) Genüge leisten, dass also die nach *ihnen* genommene Variation des Integrales $\int Ldt$ verschwindet.

Führt man nun in (34) an Stelle der ξ', η', ζ' die q'_k ein, so ergiebt sich:

$$L = \mathsf{S}\,\frac{m}{2}\left\{\begin{array}{l}(b\zeta - c\eta + \Sigma\frac{\partial\xi}{\partial q_k}q'_k)^2\\ +(c\xi - a\zeta + \Sigma\frac{\partial\eta}{\partial q_k}q'_k)^2\\ +(a\eta - b\xi + \Sigma\frac{\partial\zeta}{\partial q_k}q'_k)^2\end{array}\right\} - \mathsf{S}m(A\xi + B\eta + C\zeta) - V,$$

wo Σ die über $k = 1, 2, 3, \ldots \alpha$ ausgedehnte Summation andeuten soll. Daraus folgt:

$$(35.)\quad L = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=\alpha}\sum_{i=0}^{i=\alpha}(u_{ki}\, q'_k q'_i) - V\,.\, q'_0 q'_0\,,$$

wo q'_0 (ebenso wie in § 3) gleich 1 sein soll, und wo die Grössen u_{ki}, u_{0k}, u_{00} je nachdem beide Indices von 0 verschieden, oder einer derselben, oder beide gleich 0 sind, folgende Werthe besitzen:

$$u_{ki} = \mathsf{S}m\left(\frac{\partial\xi}{\partial q_k}\frac{\partial\xi}{\partial q_i} + \frac{\partial\eta}{\partial q_k}\frac{\partial\eta}{\partial q_i} + \frac{\partial\zeta}{\partial q_k}\frac{\partial\zeta}{\partial q_i}\right)$$

$$u_{0k} = \mathsf{S}m\left((b\zeta - c\eta)\frac{\partial\xi}{\partial q_k} + (c\xi - a\zeta)\frac{\partial\eta}{\partial q_k} + (a\eta - b\xi)\frac{\partial\zeta}{\partial q_k}\right)$$

$$u_{00} = \mathsf{S}m\left((b\zeta - c\eta)^2 + (c\xi - a\zeta)^2 + (a\eta - b\xi)^2\right) - \mathsf{S}2m(A\xi + B\eta + C\zeta).$$

Da nun der Ausdruck (35) dieselbe Form besitzt, wie der in § 3, (19) aufgestellte; so ergiebt sich, dass *die partielle Differential-Gleichung, auf deren Lösung des gegenwärtig vorliegende mechanische Problem recurrirt, sofort erhalten wird, wenn man in der dort gefundenen partiellen Differential-Gleichung* (23) *die so eben für* u_{ki}, u_{0k}, u_{00} *aufgestellten Werthe substituirt.*

Halle. Februar. 1861.

Dr. *C. Neumann.*

Доказательство теоремы Коши.

При выводѣ основной теоремы теоріи уравненій, состоящей въ томъ, что всякое уравненіе имѣетъ корень вида $p+qi$, доказываютъ, что наименьшая величина модуля функціи $f(p+qi)$ есть нуль.

Здѣсь предложено доказательство этой теоремы, не принимая въ соображеніе модуля. Доказательство состоитъ изъ двухъ частей:

1. Сперва выводимъ, что для всякой функціи fx, дающей при вставкѣ $p+qi$ величину $f(p+qi) = P+Qi$, возможенъ такой выборъ величинъ $p_1 = p+h$ и $q_1 = q+k$, чтобы въ $f(p_1+q_1 i) = P_1 + Q_1 i$ численныя величины P_1 и Q_1 были соотвѣтственно менѣе численныхъ величинъ P и Q.

$$f(p+qi) = P + Qi\ ;\ p_1 = p + h\ ,\ q_1 = q + k$$

$$f(p_1 + q_1 i) = P_1 + Q_1 i = f(p + qi + h + ki) = P + Qi + (h+ki)\, f'(p+qi) + \ldots + \frac{(h+ki)^n}{1.\,2.\,.\,n} f^{(n)}(p+qi) + \cdots$$

Положимъ для общности $f'(p+qi) = 0$, $f''(p+qi) = 0, \ldots f^{(n-1)}(p+qi) = 0$, тогда

$$f(p_1 + q_1 i) = P_1 + Q_1 i = P + Qi + \frac{(h+ki)^n}{1.\,2\ldots n} f^{(n)}(p+qi) + \ldots.$$

Называя $h = r\cos\varphi.\,\varepsilon$, $k = r\sin\varphi.\,\varepsilon$, гдѣ ε очень малая величина 1-го порядка,

$$h + ki = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,\varepsilon\,;\ (h+ki)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,\varepsilon^n$$

и
$$f(p_1 + q_1 i) = P_1 + Q_1 i = P + Qi + r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\,(P^{(n)} + Q^{(n)} i)\,\varepsilon^n + \ldots\ldots,$$

гдѣ
$$f'(p+qi) = P' + Q' i\,,\ \frac{f''(p+qi)}{1.\,2} = P'' + Q'' i\,,\ \ldots \frac{f^{(n)}(p+qi)}{1.\,2\ldots.n} = P^{(n)} + Q^{(n)} i$$

$$f(p_1 + q_1 i) = P_1 + Q_1 i = P + r^n(P^{(n)}\cos n\varphi - Q^{(n)}\sin n\varphi)\,\varepsilon^n + \{Q + r^n(P^{(n)}\sin n\varphi + Q^{(n)}\sin n\varphi)\,\varepsilon^n\}\, i + \ldots$$

+ члены, содержащіе ε въ высшей степени.

Отсюда

$$\left.\begin{array}{l}P_1 = P + r^n(P^{(n)}\cos n\varphi - Q^{(n)}\sin n\varphi)\,\varepsilon^n\\ Q_1 = Q + r^n(P^{(n)}\sin n\varphi + Q^{(n)}\cos n\varphi)\,\varepsilon^n\end{array}\right\}.\ (1)$$

Остальными членами, какъ содержащими ε въ высшей степени, мы пренебрегаемъ.

Не трудно изъ уравненій (1) видѣть, что можно выбрать такія r и φ, а слѣдовательно h и k, чтобы численныя величины P_1 и Q_1 были менѣе численныхъ величинъ P и Q; стоитъ только положить

$$\left.\begin{array}{l}r^n(P^{(n)}\cos n\varphi - Q^{(n)}\sin n\varphi) = \theta\\ r^n(P^{(n)}\sin n\varphi + Q^{(n)}\cos n\varphi) = \theta_1\end{array}\right\}.\ (2)$$

такими, чтобы знакъ конечныхъ количествъ θ и θ_1 былъ противуположенъ знаку P и Q, а r и φ, удовлетворяющія требуемымъ условіямъ, опредѣлятся, изъ уравненій (2):

$$\frac{P^{(n)}\sin n\varphi + Q^{(n)}\cos n\varphi}{P^{(n)}\cos n\varphi - Q^{(n)}\sin n\varphi} = \frac{\theta_1}{\theta} = u;\ \mathrm{tg}.\, n\varphi = \frac{uP^{(n)} - Q^{(n)}}{P^{(n)} + uQ^{(n)}}\,,$$

гдѣ можно принять $u = \pm 1$, смотря потому одинаковы ли, или неодинаковы знаки P и Q. Зная $\operatorname{tg}\varphi$, найдемъ $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ и r.

Возраженіе, что φ не опредѣлится, если $P^{(n)}=0$, и $Q^{(n)}=0$, не имѣетъ мѣста, ибо тогда бы
$P^{(n)}+Q^{(n)}i = \frac{f^{(n)}(p+qi)}{1.2\ldots.n} = 0$, чего мы не полагали.

Доказавши возможность одновременнаго убавленія численныхъ величинъ, а слѣдовательно и одновременнаго ихъ приближенія къ нулю, не трудно перейти къ остальному выводу сей теоремы.

2. Положимъ, что мы нашли p и q, для которыхъ P, или Q обратилось въ нуль, такъ что $f(p+qi) = Qi$, тогда пользуясь вышесказаннымъ, можно подобрать такія p_1 и q_1, чтобы численная величина Q убавилась, а членъ вещественный былъ очень малою величиною 2-го порядка.

Сохраняя прежнее обозначеніе имѣемъ $f(p+qi) = Qi$

$$f(p_1+q_1 i) = Qi + r\varepsilon(\cos\varphi + i\sin\varphi)(P'+Q'i) + r^2\varepsilon^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)(P''+Q''i) + \ldots\ldots$$

$$f(p_1+q_1 i) = r(P'\cos\varphi - Q'\sin\varphi) + r^2(P''\cos 2\varphi - Q''\sin 2\varphi)\varepsilon^2 + \ldots + \{Q + r(Q'\cos\varphi + P'\sin\varphi)\varepsilon\}i + \ldots$$

Можно найти r и φ подъ условіемъ, чтобы

$$\left.\begin{array}{l} r(P'\cos\varphi - Q'\sin\varphi) = 0 \\ r(Q'\cos\varphi + P'\sin\varphi) = \theta \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (3)$$

гдѣ θ конечная величина со знакомъ противуположнымъ знаку Q.

Изъ уравненій (3)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{P'}{Q'}, \quad r = \frac{\theta}{Q'\cos\varphi + P'\sin\varphi} \quad \text{и}$$

$f(p_1+q_1 i) = r^2(P''\cos 2\varphi - Q''\sin 2\varphi)\varepsilon^2 + (Q+\theta\varepsilon)i +$ *члены, содержащіе ε въ высшихъ степеняхъ.*

Продолжая дѣлать подобный выборъ p и q, пока Q, убавляясь постепенно, не обратится въ нуль, мы получимъ:

$$f(p_n + q_n i) = \Sigma\alpha^2,$$

гдѣ, α^2 безконечно малая величина 2-го порядка.

Сумма безконечно-малыхъ 2-го порядка $\Sigma\alpha^2$ не можетъ превосходить безконечно-малой 1-го порядка. Однако не трудно видѣть, что можно такимъ образомъ повести дѣло, чтобы вещественный членъ $P = \Sigma\alpha^2$ не превосходилъ безконечно-малой величины 2-го порядка.

Опредѣливши p_n и q_n такъ, чтобы

$$f(p_n + q_n i) = \Sigma\alpha^2 = \beta^2$$

безконечно-малой 2-го порядка, можно бы считать основную теорему доказанною и $p_n + q_n i$ былъ бы искомымъ корнемъ, но для большей точности покажемъ, что отъ p_n и q_n можно перейти къ p_μ и q_μ такимъ, что $f(p_\mu + q_\mu i)$ будетъ равняться безконечно-малой высшихъ порядковъ. Для этого положимъ

$$p_{n+1} = p_n + v\cos\varphi\,\varepsilon^2 \text{ и } q_{n+1} = q_n + v\sin\varphi.\,\varepsilon^2,$$

тогда

$f(p_{n+1}+q_{n+1}i) = \beta^2 + v(P\cos\varphi - Q\sin\varphi)\varepsilon^2 + r(Q\cos\varphi + P\sin\varphi)\varepsilon^2 i +$ *члены, содержащіе ε въ высшихъ степеняхъ.*

Сдѣлавъ $\left.\begin{array}{l} P\cos\varphi - Q\sin\varphi = \theta \\ Q\cos\varphi + P\sin\varphi = 0 \end{array}\right\{$ гдѣ знакъ θ противуположенъ знаку β^2, мы постоянно убавляемъ β^2 вещественный членъ, между тѣмъ какъ мнимый членъ будетъ величиной четвертаго порядка, такъ что послѣдовательными дѣйствіями можно дойти до величинъ p_μ и q_μ, при которыхъ $f(p_\mu + q_\mu i) = \gamma^4 i$, гдѣ γ^4 безконечно-малая 4-го порядка.

Ясно, что порядокъ безконечно-малой, которой можетъ равняться $f(p_\varrho + q_\varrho i)$, можетъ быть сдѣланъ какъ угодно великъ, такъ что существованіе величинъ α и β, при которыхъ $f(\alpha + \beta i) = 0$, а слѣдовательно и корня $\alpha + \beta i$ очевидно.

Кіевъ 1861-го года.

Н. Бугаевъ.

Мая 9-го дня.

Новое доказательство теоремы Вильсона.

Въ доказательствѣ, предлагаемомъ мною, теорема Вильсона является непосредственнымъ слѣдствіемъ теоремы Фермата и свойства первообразныхъ корней.

Если p есть простое число, a его первообразный корень, то въ рядѣ сравненій:

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv a \quad (\text{мод. } p) \\ a^2 \equiv b_2 \quad (\text{мод. } p) \\ a^3 \equiv b_3 \quad (\text{мод. } p) \\ \ldots\ldots \\ a^m \equiv b_m \quad (\text{мод. } p) \\ \ldots\ldots \\ a^{p-2} \equiv b_{p-2} \, (\text{мод. } p) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

ни одно изъ чиселъ a, b_2, b_3, b_4 . . . . b_{p-2} не можетъ быть равно единицѣ.

Точно также между a, b_2, b_3, b_4 . . . . b_{p-2} нѣтъ чиселъ равныхъ, ибо если бы $b_m = b_n$, то существовало бы сравненіе $a^m \equiv a^n$ (*мод. p*), что привелось бы къ сравненію $a^n(a^{m-n}-1) \equiv 0$ (*мод. p*), или $a^{m-n} \equiv 1$ (*мод. p*), что противорѣчитъ свойству первообразнаго корня a.

Перемноживъ сравненія (1) получимъ:

$$a^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} \equiv a\,b_2\,b_3\,b_4 \ldots . b_{p-2} \,(\text{мод. } p) \quad . \; (2)$$

Такъ какъ неравныя числа a, b_2, b_3 . . . b_{p-2}, будучи наименьшими положительными вычетами чиселъ $a, a^2, a^3 \ldots a^{p-2}$, менѣе p, и ни одно изъ нихъ

не равно единицѣ, то рядъ $p-2$ чиселъ $a, b_2, b_3 \ldots b_{p-2}$ долженъ совершенно заключаться въ рядѣ чиселъ $2, 3, 4, 5 \ldots \overline{p-2}, \overline{p-1}$, такъ что

$$a b_2 b_3 b_4 \ldots b_{p-2} \equiv 2.\ 3.\ 4.\ 5 \ldots\ldots \overline{p-2} \,.\, \overline{p-1}$$

и сравненіе (2) приметъ видъ:

$$a^{\frac{\overline{p-1} \,.\, \overline{p-2}}{2}} \equiv 1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots \overline{p-2} \,.\, \overline{p-1}\ (\text{мод } p.); \quad (3)$$

откуда, принявъ a за основаніе индикаторовъ имѣемъ:

$$Ind. (1.\ 2.\ 3.\ 4 \,.\, \overline{p-2} \,.\, \overline{p-1}) \equiv \frac{p-1 \,.\, p-2}{2}\ (\text{мод } \overline{p-1}) \,. \quad (4)$$

Изъ сравненія (3) получаемъ:

$$a^{\overline{p-1} \,.\, \overline{p-2}} \equiv (1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots \overline{p-2} \,.\, \overline{p-1})^2\ (\text{мод } p) \,. \quad (5)$$

По теоремѣ Фермата

$$a^{p-1} \equiv 1\ (\text{мод. } p), \quad a^{\overline{p-1} \,.\, \overline{p-2}} \equiv 1\ (\text{мод } p) \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

слѣдовательно изъ сравненій (5) и (6) выходитъ:

$$[1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots \overline{p-2} \,.\, \overline{p-1}]^2 \equiv 1\ (\text{мод. } p) \text{ или}$$

$$(1.2.3 \ldots \overline{p-2} \,.\, \overline{p-1} - 1)(1.\ 2.\ 3 \ldots \overline{p-2} \,.\, \overline{p-1} + 1) \equiv 0\ (\text{мод. } p). \quad (7)$$

Но число $1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots \overline{p-2} \,.\, \overline{p-1} - 1$ не дѣлится на p, ибо въ противномъ случаѣ существовали бы сравненія:

$$1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots \overline{p-2} \,.\, \overline{p-1} \equiv 1\ (\text{мод. } p)$$

$$Ind. (1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots \overline{p-2} \,.\, \overline{p-1} \equiv 0\ (\text{мод. } p-1). \quad (8)$$

Послѣднее, вмѣстѣ съ (4), дало бы мѣсто сравненію:

$\frac{(p-1)\,(p-2)}{2} \equiv 0\ (\text{мод. } p-1)$, очевидная нелѣпость; ибо

$$\frac{\overline{p-1} \,.\, \overline{p-2}}{2} = \overline{p-1} \,.\, \frac{p-3}{2} + \frac{p-1}{2} \equiv \frac{p-1}{2}\ (\text{мод. } p-1),$$

слѣдовательно если по (7) не имѣетъ мѣста сравненіе $1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots \overline{p-2} \,.\, \overline{p-1} - 1 \equiv 0\ (\text{мод. } p)$, то должно существовать сравненіе

$$1.\ 2.\ 3 \ldots \overline{p-2} \,.\, \overline{p-1} + 1 \equiv 0\ (\text{мод. } p),$$

или теорема Вильсона.

Кіевъ

Н. Бугаевъ.

20-го Мая 1861.

II.

Библіографическій указатель.

23. *Handbuch der Kugelfunctionen.* Von Dr. *E. Heine* Berlin, 1861.

Изданная нынѣ книга предназначается служить въ нѣкоторой степени введеніемъ къ систематическому изложенію теоріи особаго рода функцій, вообще называемыхъ Лапласовыми функціями и часто встрѣчающихся въ изслѣдованіяхъ о притяженіи сфероидовъ, о фигурѣ земли и въ нѣкоторыхъ другихъ частяхъ математической физики. Авторъ пользовался сочиненіями Лапласа, Лежандра, Гауса, Дирикле, Якоби, Грина (Green), Ламе и другихъ. Сочиненіе Г-на Гейне составляетъ весьма замѣчательную монографію объ одномъ изъ любопытныхъ предметовъ математическаго анализа. Послѣдняя часть книги содержитъ приложенія къ теоріи механическихъ квадратуръ, по руководству Гаусса, и сверхъ того приложенія къ теоріи притяженій и теоріи теплоты.

24. *The Mathematical Works of Isaac Barrow.* Edited for Trinity College by *W. Whewell*, Cambridge. 1860.

Здѣсь заключаются лекціи, которыя читалъ Барровъ въ 1664—1670 въ Кембриджѣ, въ качествѣ Lucasian Professor of Mathematics. Авторъ принадлежитъ къ числу знаменитѣйшихъ ученыхъ XVII-го вѣка, и для занимающихся исторіею физико-математическихъ наукъ, очень занимательны будутъ его Lectiones Mathematicae, Lectiones Opticae и Lectiones Geometricae. Первыя изъ нихъ содержатъ общія начала математики, вторыя геометрическія доказательства разныхъ оптическихъ предложеній, а въ третьихъ разсматриваются свойства кривыхъ линій. Въ этомъ же томѣ помѣщены предисловіе и посвященіе къ Баррову изданію Эвклидовыхъ началъ, также его предисловіе къ изданію твореній Архимеда, Аполлонія и Θеодосія.

25. »*Report of the Superintendent of* »*the coast Survey, showing the progress* »*of the Survey during the Year* 1857.«

Начальникъ этой съемки, Профессоръ A. D. Bache принадлежитъ къ числу отличнѣйшихъ американскихъ ученыхъ; между его сотрудниками находились также лица, которые своими трудами пріобрѣли почетную извѣстность. Обширность работъ, богатыя средства, назначенныя для ихъ исполненія и многія ученыя изслѣдованія дѣлаютъ эту съемку въ высшей степени достойною вниманія.—Признательности и даже удивленія заслуживаетъ щедрость, съ которою изданъ этотъ отчетъ Правительствомъ Соединенныхъ Штатовъ въ числѣ 6200 экземпляровъ, изъ коихъ большая часть вмѣстѣ съ дорогими картами разосланы въ даръ нетолько публичнымъ библіотекамъ, Академіямъ и Обсерваторіямъ, но также значительному числу частныхъ лицъ.

Начиная съ сѣверовосточной оконечности Соед. Штатовъ, съемка простирается къ югу и западу, около береговъ атлантическаго океана и мексиканскаго залива; потомъ идетъ въ южной ея части по берегамъ тихаго океана, и направляется оттуда къ сѣверу и западу. Съ геодезическою съемкою соединены морскіе промѣры и разныя гидрографическія работы, каковы изслѣдованія Гольфъ-стрема, морскихъ приливовъ и т. п.; разсмотрѣны также вѣтры, морскія теченія и явленія земнаго магнетизма.

Приложенныя таблицы и карты весьма важны для мореходцевъ, показывая имъ всё, что можетъ служить къ удобству и безопасности плаванія вдоль береговъ

соединенныхъ Штатовъ, также въ мексиканскомъ заливѣ и около нѣкоторыхъ острововъ.

Въ томъ же отчетѣ находится нѣсколько любопытныхъ статей; онѣ содержатъ отдѣльныя ученыя изысканія и мы вкратцѣ приведемъ ихъ содержаніе.

Одинъ изъ искуснѣйшихъ американскихъ астрономовъ, Г-нъ Гульдъ (B. Gould) довольно подробно разсмотрѣлъ способъ опредѣлять разности географ. долготъ помощію гальваническихъ телеграфовъ. Въ Америкѣ употреблялся этотъ способъ болѣе, чѣмъ въ другихъ странахъ и потому не удивительно, что тамъ собрано много объ этомъ свѣденій. Для достиженія желаемой точности потребны разныя предосторожности. Нетолько нужно производить многія опредѣленія въ одну и въ обратную сторону, но слѣдуетъ еще по возможности исключать промежуточные сигналы и пользоваться хорошими регистрирными аппаратами (recording apparats). Безъ этихъ пособій выводы могутъ быть сомнительны; — Г. Гульдъ полагаетъ, что въ изслѣдованіяхъ, произведенныхъ въ Европѣ, встрѣчаются недостатки, и опредѣленіямъ разностей долготъ помощію гальваническихъ телеграфовъ отдано въ нѣкоторыхъ случаяхъ предпочтеніе предъ всѣми другими способами безъ достаточной критики.

Знаменитый американскій Геометръ Г. Пирсъ (B. Peirce) предложилъ нѣсколько очень занимательныхъ указаній о степени точности разныхъ астрономическихъ средствъ для изысканія геогр. долготъ. Въ благопріятныхъ случаяхъ наблюденія большихъ солнечныхъ затмѣній, особенно полныхъ и кольцеобразныхъ, могутъ служить къ опредѣленію долготъ съ точностію до $\frac{1}{2}$ или даже до $\frac{1}{3}$ секунды времени. Въ отношеніи къ покрытіямъ звѣздъ луною, Г. Пирсъ полагаетъ, что едва ли даже нынѣ, пользуясь отличными лунными таблицами Г. Гансена, можно скоро достигнуть благонадежнаго результата помощію наблюденія отдѣльныхъ покрытій. Независимо отъ малыхъ погрѣшностей таблицъ, неправильности очертаній краевъ луны оказываютъ вліяніе, которое уменьшаетъ ту степень точности, какой безъ того можно было бы достигнуть. Гораздо выгоднѣе наблюденія покрытій луною звѣздъ въ Плеядахъ, какъ это уже замѣтилъ Бессель. Въ этомъ случаѣ наблюдаются въ теченіи короткаго времяни покрытія многихъ звѣздъ на разныхъ точкахъ луннаго диска, и потому можно ожидать, что въ среднихъ выводахъ значительно ослабится вліяніе неровностей краевъ луны. На этотъ родъ наблюденій обращено особенное вниманіе въ Америкѣ; тамъ же тщательно занимаются обработкою прежнихъ наблюденій надъ покрытіями Плеядъ. Что касается до лунныхъ кульминацій, то по мнѣнію Г-на Пирса этимъ способомъ трудно опредѣлить разности долготъ точнѣе чѣмъ до одной секунды времени. Съ этими заключеніями вѣроятно будутъ согласны всѣ астрономы.

Въ американской съемкѣ за основаніе принята долгота обсерваторіи въ американскомъ городѣ Кембриджѣ (Cambridge U. S. Massachuset). Различные способы, по которымъ изслѣдована эта долгота, къ западу отъ Гринича, даютъ слѣдующія числа:

По многочисленнымъ луннымъ кульминаціямъ эта долгота	$= 4^h \cdot 44^m\ 28^s,4$
По затмѣніямъ солнца и покрытіямъ звѣздъ луною	$=4\ 44\ 29,\ 6$
По хронометрическимъ опредѣліямъ, выведеннымъ помощію многихъ перевозокъ хронометровъ изъ Ливерпуля въ Америку и обратно, въ 1849, 1851 и 1855 годахъ	$=4\ 44\ 30,8$
Вѣроятная долгота предполагается.	$= 4^h \cdot 44^m\ 29^s,5.$

Г-нъ Bache предложилъ формулы для вычисленія хронометрическихъ опредѣленій долготъ по теоріи вѣроятностей, принимая во вниманіе вліяніе перемѣнъ температуры на ходъ хронометровъ и на разность ходовъ въ путешествіяхъ и въ покоѣ.

Приливы и отливы на обширныхъ берегахъ Соединенныхъ Штатовъ представляютъ многія разнообразныя явленія, и потому ихъ раздѣлили на три отдѣльные класса явленій. Приливы водъ атлантическаго океана суть самые правильные; каждые сутки приливъ и отливъ повторяются два раза и возвышенія слѣдующихъ однѣ за другими высокихъ водъ, мало между собою различаются. Приливы и отливы на берегахъ тихаго океана повторяются тоже дважды въ сутки, но утренніе и вечерніе приливы значительно отличаются между собою по высотѣ; такъ что случается видѣть иныя скалы на три фута поверхъ отливной воды, между тѣмъ какъ въ слѣдующій за тѣмъ отливъ эти скалы остаются совершенно покрытыми водою. Также промежутки между послѣдовательными высокими и низкими водами выходятъ весьма неравными. Въ портахъ Мексиканскаго залива, къ западу отъ мыса Св. Георгія, приливъ и отливъ совершаются большею частію по разу въ сутки, и только въ нѣкоторые дни мѣсяца повторяются дважды въ 24 часа. Измѣненіе уровня водъ въ этихъ портахъ довольно мало; оно становится гораздо значительнѣе къ востоку отъ мыса св. Георгія. Мы съ любопытствомъ узнали, изъ донесенія Г-на Коля (F. G. Kohl), что онъ занимается составленіемъ подробной исторіи морскихъ открытій и разнообразныхъ изслѣдованій, совершенныхъ вдоль западныхъ береговъ Соединенныхъ Штатовъ.

А. С.

III.

Извѣстіе о новой кометѣ.

— Новая комета, неожиданно и одновременно усмотрѣнная во многихъ мѣстахъ Европы а именно $^{30}/_{18}$ Іюня, въ настоящее время быстро удаляется отъ насъ, такъ что въ послѣдній день нашего Іюня свѣтъ ея долженъ составлять едва $^{1}/_{10}$ того блеска въ какомъ она явилась 18 Іюня. Приблизительные элементы, вычисленные Г. *Папе* на основаніи первыхъ наблюденій, представляютъ въ наклоненіи къ эклиптикѣ и въ отстояніи перигелія столь значительное сходство съ элементами кометы 1748 года (видѣнной равнымъ образомъ простыми глазами и которой путь опредѣленъ *Лемонье*), что можно было бы принять ихъ тождественными; но направленіе движенія новой кометы есть прямое, тогда какъ кометы 1748 обратное.

Ред.

Извлеченія изъ періодическихъ изданій.

1. *Новый выводъ формулъ для сферическаго эксцесса, Др. О Вернера.*
(Mélanges mathématiques et astronomiques T. II. и Zeitschrift für Mathematik und Physik 1861. Heft 2).

Пусть стороны сферическаго треугольника, a, b, c не превосходящія 180^0, находятся въ слѣдующей зависимости отъ сторонъ p, q, r плоскаго треугольника:

$$p = \cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b,\ q = \sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b \text{ и } r = \cos\frac{1}{2}c;$$

то, называя соотвѣтственно углы сферич. т-ка A, B, C и плоскаго P, Q, R, мы имѣемъ:

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2pq.\cos R$$

или $$\cos^2\frac{1}{2}c = \cos^2\frac{1}{2}a.\cos^2\frac{1}{2}b + \sin^2\frac{1}{2}a + \sin^2\frac{1}{2}b - 2\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b.\cos R.$$

Пользуясь извѣстными тригонометрическими отношеніями:

$$\sin^2\frac{1}{2}x = \frac{1-\cos x}{2},\quad \cos^2\frac{1}{2}x = \frac{1+\cos x}{2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{1}{2}x.\cos\frac{1}{2}x,$$

предъидущая формула, по приведеніи, обращается въ

$$\cos c = \cos a\cos b - \sin a\sin b\cos R;$$

а такъ какъ кромѣ того въ сферическомъ треугольникѣ:

$$\cos c = \cos a\cos b - \sin a\sin b\cos C,$$

слѣдовательно

$$\cos R = -\cos C,\ \text{ или } R = 180^0 - C.$$

Далѣе, пользуясь извѣстною формулой плоской тригонометріи и вышевыведенными отношеніями, мы получимъ:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(P-R) = \frac{p-q}{p+q}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}R = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}C,$$

а такъ какъ по Неперовымъ аналогіямъ

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}.\operatorname{tang}\frac{1}{2}C;$$

то слѣдуетъ что

$$\frac{1}{2}(P-Q) = 90^0 - \frac{1}{2}(A+B).$$

Сверхъ того мы имѣемъ: $$P+Q = 180 - R = C,$$

откуда выводимъ: $$P = 90^0 - \frac{A+B-C}{2} = C - \frac{1}{2}E \text{ и } Q = \frac{A+B+C}{2} - 90^0 = \frac{1}{2}E,$$

гдѣ E обозначаетъ сферическій эксцессъ.

Возьмемъ теперь слѣдующія извѣстныя формулы плоской тригонометріи.

$$\sin P = \frac{1}{2qr}\sqrt{(p+q+r)(q+r-p)(p+r-q)(p+q-r)},$$

$$\sin Q = \frac{1}{2pr}\sqrt{(p+q+r)(q+r-p)(p+r-q)(p+q-r)},$$

$$\cos P = \frac{q^2+r^2-p^2}{2qr},\quad \cos Q = \frac{p^2+r^2-q^2}{2pr}$$

$$\sin\frac{1}{2}P = \sqrt{\frac{(p+r-q)(p+q-r)}{4qr}},\quad \sin\frac{1}{2}Q = \sqrt{\frac{(q+r-p)(p+q-r)}{4pr}},$$

$$\cos\frac{1}{2}P = \sqrt{\frac{(p+q+r)(p+q-r)}{4qr}},\quad \cos\frac{1}{2}Q = \sqrt{\frac{(p+q+r)(p+r-q)}{4pr}},$$

и замѣчая, что въ нихъ, на основаніи выше-выведенныхъ условій:

$$p+q+r = \cos\frac{1}{2}(a-b) + \cos\frac{1}{2}c = 2\cos\frac{1}{4}(a+c-b)\cos\frac{1}{4}(b+c-a)$$

$$q+r-p = \cos\frac{1}{2}c - \cos\frac{1}{2}(a+b) = 2\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)$$

$$p+r-q=\cos\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}(a+b)=2\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)$$

$$p+q-r=\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}c=2\sin\frac{1}{4}(a+c-b)\sin\frac{1}{4}(b+c-a)$$

и

$$q^2+r^2-p^2=\cos^2\frac{1}{2}c-(\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b-\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b)=\cos^2\frac{1}{2}c-\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b=\frac{1+\cos c-\cos a-\cos b}{2}$$

$$p^2+r^2-q^2=\cos^2\frac{1}{2}c+\cos^2\frac{1}{2}a=\sin^2\frac{1}{2}b=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{2}$$

получается слѣдующая система формулъ:

1,
$$\sin\left(C-\frac{1}{2}E\right)=\frac{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\sin\frac{1}{2}E=\frac{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

2,
$$\cos\left(C-\frac{1}{2}E\right)=\frac{1+\cos c-\cos a-\cos b}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\qquad \cos\frac{1}{2}E=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

3,
$$\sin\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}E\right)=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(b+c-a)\sin\frac{1}{4}(a+c-b)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}},$$

$$\sin\frac{1}{4}E=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(b+c-a)\sin\frac{1}{4}(a+c-b)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}},$$

4,
$$\cos\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}E\right)=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(b+c-a)\cos\frac{1}{4}(a+c-b)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}},$$

$$\cos\frac{1}{4}E=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(b+c-a)\cos\frac{1}{4}(a+c-b)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}.$$

Откуда по раздѣленію 3 на 4 получаются наконецъ слѣдующія весьма простыя выраженія.

5,
$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}E\right)=\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(b+c-a)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+c-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b-c)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{4}E=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(b+c-a)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+c-b)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+b-c)}.$$

Примѣчаніе. Здѣсь представляется способъ опредѣленія угловъ сферич. треугольника по сторонамъ, вычисляя сначала E по послѣдней формулѣ и затѣмъ C изъ

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}E\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}(b+c-a)\operatorname{tg}\frac{1}{4}(a+c-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{4}E};$$

A и B опредѣлятся подобными же формулами.

М. Г.

2. Одновременно встрѣчаются два изслѣдованія относительно теплопроводимости газовъ: Магнуса, (въ Poggendorf's Ann. B. CXII s. 497), и Тиндалля (въ Comptes rendus 25 Fevrier 1861). Первый изъ упомянутыхъ физиковъ занимался собственно теплопроводимостью газовъ, для чего употреблялъ стеклянный сосудъ съ тонкими стѣнками, въ который былъ вставленъ термометръ; этотъ сосудъ нагрѣвался сверху кипящею водою, и былъ защищенъ отъ внѣшняго вліянія еще двумя сосудами. Въ другомъ опытѣ Магнусъ употреблялъ вмѣсто термометра термоэлектрическій столбъ, причемъ и устройство опыта было отчасти измѣнено. Результаты изслѣдованій Магнуса заключаются въ слѣдующемъ: 1) Температура, показываемая термометромъ, помѣщеннымъ въ газовой средѣ, нагрѣтой сверху, бываетъ различна, смотря по роду газа; въ водородѣ эта температура выше нежели въ другихъ испытанныхъ имъ газахъ, а именно атмосферномъ воздухѣ, кислородѣ, водородѣ, углекислотѣ, окиси углерода, закиси азота, болотистаго газа, маслороднаго газа, амміака, ціяна, и сѣрнистой кислоты.

2) Температура, показываемая термометромъ въ *водородѣ*, выше, нежели въ пустомъ пространствѣ, и чѣмъ газъ сгущеннѣе, тѣмъ она выше; между тѣмъ какъ въ другихъ газахъ температура ниже, нежели въ пустомъ пространствѣ, и тѣмъ ниже чѣмъ газъ сгущеннѣе. Отсюда слѣдуетъ, что водородъ проводитъ теплоту подобно металламъ. Это замѣчательное свойство водорода выказывается нетолько тогда, когда онъ свободенъ, но и въ томъ случаѣ если его движеніе удерживается лебяжьимъ пухомъ или другимъ подобнымъ веществомъ.

3) Всѣ газы представляютъ значительное сопротивленіе прохожденію теплотворныхъ лучей и это сопротивленіе тѣмъ значительнѣе, чѣмъ сгущеннѣе газъ; изъ всѣхъ газовъ атмосферный воздухъ и его составныя части проводятъ наиболѣе теплоты.

4) Прохожденіе теплоты измѣняется съ источникомъ, но лучи, выходящіе изъ кипящей воды, представляютъ наиболѣе разнообразія при прохожденіи чрезъ различные газы. Между безцвѣтными газыми амміакъ имѣетъ самую дурную проводимость, а послѣ него маслородный газъ.

Тиндалль занимался поглощательною и лучеиспускательною способностью газовъ и паровъ: онъ изслѣдовалъ свойства 8 газовъ и 13 паровъ. Приборъ, употребленный упомянутымъ физикомъ состоялъ изъ мѣднаго куба, покрытаго съ одной стороны копотью, и содержащаго въ себѣ кипящую воду; изъ трубки, изъ которой былъ вытянутъ воздухъ, закрытой съ обоихъ концевъ пластинками изъ каменной соли. Изъ другой трубки, приставленной къ первой, которая при посредствѣ воздушнаго насоса, могла быть наполнена различными газами, въ различной степени сгущенія; изъ термомультипликатора, который показывалъ степень теплоты, прошедшей чрезъ различные испытуемые газы. Опыты показали, что самое большое поглощеніе теплоты происходитъ въ амміакѣ и маслородномъ газѣ (81%), а самое меньшее въ атмосферномъ воздухѣ (0,3%); между ними можно помѣстить всѣ остальные испытанные газы; окись углерода, углекислоту и др. Результаты эти сходны съ результатами, полученными Магнусомъ; ибо тѣмъ меньше теплоты доходитъ до термометра, чѣмъ значительнѣе поглощеніе оной.

Тиндалль нашелъ, что ниже извѣстной степени сгущенія газа, поглощеніе теплоты пропорціонально сгущенію; далѣе пропорціональсти нѣтъ — поглощеніе замедляется.

Пары поглощаютъ значительную часть теплоты; между ними однакожъ самую большую поглощательную способность имѣютъ пары сѣрнаго эфира, а самую меньшую сѣроуглерода (CS_2). Пары эфира поглощаютъ въ 10 разъ болѣе нежели маслородный газъ, и въ 100 разъ болѣе нежели воздухъ.

Водяные пары, находящіеся въ атмосферѣ, по наблюденіямъ въ хорошее ноябрское время, оказали въ 15 разъ большую поглощательную способность противъ чистаго воздуха. Отсюда слѣдуетъ, что количество паровъ, постоянно содержащихся въ воздухѣ, должно имѣть вліяніе на климатъ. Замѣчательно еще, что озонированный кислородъ поглощаетъ въ 4 раза болѣе теплоты, нежели кислородъ обыкновенный.

Лучеиспускательная способность газовъ и паровъ соотвѣтственна ихъ поглощательной способности:—гдѣ больше поглощенія, тамъ больше и лучеиспусканія.

Наконецъ замѣчательно и то, что всѣ простые газы имѣютъ меньшую поглощательную способность, нежели сложные. При этомъ надобно различать механическую смѣсь и химическую: первая мало отличается въ своемъ теплотворномъ свойствѣ отъ ея составныхъ частей; вторая же производитъ огромное поглощеніе, сравнительно съ составляющими ея газами.

К. Ч.

Двоякое рѣшеніе задачи № 3, предложенной Г-мъ Износковымъ.

(См. № 8 Вѣст. Мат. Наукъ).

Положивъ для краткости, $\int\limits_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x^2}}\cos bx^2\,dx = u$ и $\int\limits_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x^2}}\sin bx^2\,dx = v$,

и дифференцируя каждый изъ сихъ интеграловъ по c, получимъ вопервыхъ

$$\frac{du}{dc} = -\frac{c}{2}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x^2}}\cos bx^2\frac{dx}{x^2} \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dc} = -\frac{c}{2}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x^2}}\sin bx^2\frac{dx}{x^2}$$

и потомъ, дифференцируя еще разъ,

$$\frac{d^2u}{dc^2}=\frac{1}{c}\cdot\frac{du}{dc}+\frac{c^2}{4}\cdot\int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x^2}}\cos bx^2\,\frac{dx}{x^4}\qquad \frac{d^2v}{dc^2}=\frac{1}{c}\cdot\frac{dv}{dc}+\frac{c^2}{4}\cdot\int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x^2}}\sin bx^2\,\frac{dx}{x^4}$$

но интегрированіе по частямъ даетъ

$$\int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x^2}}\cos bx^2\,\frac{dx}{x^4}=\frac{2}{c^2}\int_0^\infty\frac{1}{x}\cos bx^2\,d\,e^{-\frac{c^2}{4x^2}}=\frac{4b}{c^2}\int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x^2}}\sin bx^2\,dx+\frac{2}{c^2}\int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x^2}}\cos bx^2\,\frac{dx}{x^2}=\frac{4b}{c^2}\cdot v-\frac{4}{c^3}\cdot\frac{du}{dc},$$

такъ что, по подстановкѣ, получимъ

$$\frac{d^2u}{dc^2}=b\,v\,.$$

Точно также найдемъ:

$$\frac{d^2v}{dc^2}=-\,b\,u\,.$$

Изъ двухъ послѣднихъ уравненій выводимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія:

$$\frac{d^4u}{dc^4}+b^2u=0\,,\quad \frac{d^4v}{dc^4}+b^2v=0\,,$$

интегрированіе которыхъ доставитъ намъ выраженія для искомыхъ функцій u и v. Притомъ, такъ какъ сіи уравненія тождественны, то ихъ интегралы, будучи одного и тогоже вида, могутъ отличаться только постоянными количествами въ нихъ входящими. По общему правилу интегрированія линейныхъ уравненій съ постоянными коефиціентами составляемъ вспомогательное уравненіе четвертой степени.

$$r^4+b^2=0\,,$$

которое, какъ извѣстно будетъ имѣть корнями слѣдующія двѣ пары мнимыхъ сопряженныхъ выраженій

$$+\sqrt{\frac{b}{2}}\pm\sqrt{\frac{b}{2}}\cdot\sqrt{-1}\quad\text{и}\quad-\sqrt{\frac{b}{2}}\pm\sqrt{\frac{b}{2}}\cdot\sqrt{-1}\,,$$

и слѣдовательно, искомые общіе интегралы, заключающіе по четыре произвольныхъ постоянныхъ, будутъ:

$$u=\left(A\cos c\sqrt{\frac{b}{2}}+B\sin c\sqrt{\frac{b}{2}}\right)\cdot e^{-c\sqrt{\frac{b}{2}}}+\left(C\cos c\sqrt{\frac{b}{2}}+D\sin c\sqrt{\frac{b}{2}}\right)e^{c\sqrt{\frac{b}{2}}}$$
$$v=\left(A'\cos c\sqrt{\frac{b}{2}}+B'\sin c\sqrt{\frac{b}{2}}\right).\ e^{-c\sqrt{\frac{b}{2}}}+\left(C'\cos c\sqrt{\frac{b}{2}}+D'\sin c\sqrt{\frac{b}{2}}\right)e^{c\sqrt{\frac{b}{2}}}\ .$$

Для опредѣленія величинъ постоянныхъ A, B, C и D, соотвѣтствующихъ искомому нами частному интегралу, оддиференцируемъ общее выраженіе u три раза по c и въ полученныхъ выраженіяхъ для $\frac{du}{dc}$, $\frac{d^2u}{dc^2}$, $\frac{d^3u}{dc^3}$, также какъ и въ первоначальномъ для u, положимъ $c=0$, что дастъ намъ слѣдующія уравненія:

$$A+C=u_0$$
$$\sqrt{\frac{b}{2}}\,(B-A+C+D)=\left(\frac{du}{dc}\right)_0$$
$$-\,b\,(B-D)=\left(\frac{d^2u}{dc^2}\right)_0$$
$$b\sqrt{\frac{b}{2}}\,(A+B+D+C)=\left(\frac{d^3u}{dc^3}\right)_0$$

гдѣ u_0, $\left(\frac{du}{dc}\right)_0$, $\left(\frac{d^2u}{dc^2}\right)_0$ и $\left(\frac{d^3u}{dc^3}\right)_0$ означаютъ величины интеграла u и его первыхъ трехъ производныхъ по c, получаемыя при положеніи въ нихъ $c=0$. Величины сіи найдутся, припомнивъ слѣдующія двѣ весьма извѣстныя формулы, найденныя въ первый разъ, какъ мнѣ кажется, Эйлеромъ:

$$\int_0^\infty\sin bx^2\,dx=\int_0^\infty\cos bx^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$

Такимъ образомъ мы будемъ имѣть $u_0=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}$.

Для полученія величины производной $\left(\frac{du}{dc}\right)_0$, которая, отъ прямаго положенія $c=0$ въ вышенайденномъ выраженіи для $\frac{du}{dc}$, представляется въ видѣ неопредѣленномъ $0\,.\,\infty$, мы положимъ предварительно $\frac{x}{c}=z$, тогда найдемъ

$$\frac{du}{dc}=-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4z^2}}\cos bc^2z^2\cdot\frac{dz}{z^2}$$

и потомъ

$$\left(\frac{du}{dc}\right)_0=-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{4z^2}}\,\frac{dz}{z^2}=-\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Величина $\left(\frac{d^2u}{dc^2}\right)_0$ получается непосредственно, ибо мы имѣемъ по предъидущему

$$\left(\frac{d^2u}{dc^2}\right)_0=bv_0=\frac{b}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$

Наконецъ $\left(\frac{d^3u}{dc^3}\right)_0=b\left(\frac{dv}{dc}\right)_0$, но $\left(\frac{dv}{dc}\right)_0=0$, ибо интегралъ $\int_0^\infty\sin bx^2\,\frac{dx}{x^2}$ имѣетъ величину конечную; въ самомъ дѣлѣ, интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\int_0^\infty \sin bx^2 \frac{dx}{x^2} = -\int_0^\infty \sin bx^2 \, d\,\frac{1}{x} = \left[\frac{\sin bx^2}{x}\right]_0^\infty + 2b\int_0^\infty \cos bx^2\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sqrt{b}$$

и слѣдовательно,

$$\left(\frac{d^3u}{dc^3}\right)_0 = 0.$$

Имѣя всѣ эти величины и вставляя ихъ въ предъидущія уравненія, получимъ окончательныя уравненія для опредѣленія постоянныхъ A, B, C и D,

$$A + C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$

$$B - A + C + D = -\sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$

$$-B + D = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}$$

$$A + B + D - C = 0;$$

откуда выводимъ

$$A = -B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}, \quad C = 0, \quad D = 0,$$

и слѣдовательно, искомое выраженіе для u будетъ

$$u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}\left\{\cos c\sqrt{\frac{b}{2}} - \sin c\sqrt{\frac{b}{2}}\right\}\cdot e^{-c\sqrt{\frac{b}{2}}}$$

Постоянныя A', B', C' и D' опредѣлятся совершенно подобнымъ же образомъ, и найдемъ что

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}\left\{\cos c\sqrt{\frac{b}{2}} + \sin c\sqrt{\frac{b}{2}}\right\}\cdot e^{-c\sqrt{\frac{b}{2}}}$$

Зная u, можно также получить v чрезъ простое дифференцированіе по уравненію

$$v = \frac{1}{b}\cdot\frac{d^2u}{dc^2}.$$

Межевой Инженеръ-Поручикъ *Лѣтниковъ.*

Значенія опредѣленныхъ интеграловъ:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4y^2}} \cos by^2\, dy \quad , \quad \int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4y^2}} \sin by^2\, dy$$

можно получить такимъ образомъ.

Беремъ интегралъ:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x} \cos bx\, dx = \frac{a^2}{a^4 + b^2},$$

умножаемъ его на $\cos(ca)\,da$ и интегрируемъ въ отношеніи къ a въ границахъ: o и ∞

Тогда съ помощію формулы:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x} \cos ca\, da = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{-\frac{c^2}{4x}}$$

получимъ:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x}} \cos bx \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{a^2 \cos ca\, da}{b^2 + a^4},$$

но:

$$\int_0^\infty \frac{a^2 \cos ca\, da}{b^2 + a^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2b}}\left[\cos c\sqrt{\frac{b}{2}} - \sin c\sqrt{\frac{b}{2}}\right] e^{-c\sqrt{\frac{b}{2}}} \text{(*)}$$

слѣдовательно:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4x}} \cos bx \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2b}}\left[\cos c\sqrt{\frac{b}{2}} - \sin c\sqrt{\frac{b}{2}}\right] e^{-c\sqrt{\frac{b}{2}}}$$

Или: (полагая: $x = y^2$)

$$\int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4y^2}} \cos by^2 dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}\left[\cos c\sqrt{\frac{b}{2}} - \sin c\sqrt{\frac{b}{2}}\right] e^{-c\sqrt{\frac{b}{2}}}.$$

Подобнымъ же способомъ получимъ:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{c^2}{4y^2}} \sin by^2 dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{4b}}\left[\cos c\sqrt{\frac{b}{2}} + \sin c\sqrt{\frac{b}{2}}\right] e^{-c\sqrt{\frac{b}{2}}}.$$

Л. Износковъ.

(*) Пуассонъ даетъ общую формулу: (Journal de l'Ecole Polytéchnique Cah. XVI, p. 231.)

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{1 + x^{2n}} = \frac{\pi}{n}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2n} - a\sin\frac{\pi}{2n}\right) e^{-a\cos\frac{\pi}{2n}} + \cos\left(\frac{2\pi}{2n} - a\sin\frac{2\pi}{2n}\right) e^{-a\cos\frac{2\pi}{2n}} + \ldots \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2n} - \sin\frac{(n-1)\pi}{2n}\right) e^{-a\cos\left(\frac{n-1}{2n}\right)\pi}\right]$$

Печатать позволяется, Вильно 3 Іюля 1861 года. *Ценсоръ Статскій Совѣтникъ и Кавалеръ А. Мухинъ.*

ВИЛЬНО Типографія А. Марциновскаго. Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ.*